

SCHMETTERLINGE IM NEWTON-VERFAHREN

Wolf Bayer

8. Juli 2009

Zusammenfassung

Der Newton-Algorithmus ist seit etwa 300 Jahren bekannt und fehlt in keiner Numerik-Vorlesung. Er dient zur Lösung von nicht-linearen Gleichungen oder zum Bestimmen von Nullstellen einer Funktion; er ist Generationen von Studierenden und praktischen Mathematikern vertraut. Weniger bekannt ist es, dass der Newton-Algorithmus Chaos erzeugen und dass der Schmetterlingseffekt auftreten kann.

In den Jahren 1918 und 1919 erschienen Artikel von Gaston Julia (1893-1978) und Pierre Fatou (1878-1929) über den Newton-Algorithmus, angewandt auf komplexwertige Funktionen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit drei oder mehr Nullstellen. Ohne einen Computer zur Verfügung zu haben erkannten sie, dass sich zwischen zwei Attraktionsbereichen stets auch Elemente des dritten Attraktionsbereichs befinden. Seitdem kennt man eine Situation, in der oft Chaos auftritt: Drei Konkurrenten wirken magnet-ähnlich auf ein bewegliches Element und versuchen dieses zu sich her zu ziehen.

Diese konkurrierende Attraktion wurde im Komplexen gründlich untersucht, sie findet sich in fast jedem Buch zu dynamischen Systemen und Chaos. Im Reellen dagegen fanden wir sie nur bei Becker/Dörfler (1992) beschrieben.

In dieser Arbeit wird das Newton-Verfahren gründlich untersucht und seine 'Versager' vorgestellt. Die Suche nach Chaos führt über einen misslingenden Ansatz zu einer Konkurrenz-Situation von drei Nullstellen. Schließlich wird der Schmetterlingseffekt nachgewiesen und Attraktionsbereiche visuell dargestellt.

Das hinreichende Kriterium wird mit dem Banach'schen Fixpunktsatz bewiesen; ansonsten wird nur mathematisches Wissen der Jahrgangstufe 12 verwendet.

Mit Artikeln dieser Reihe wird am Hans-und-Hilde-Coppi-Gymnasium Mathematik und Informatik unterrichtet, sie sind Unterrichtsmaterial der Seminarkurse *Fraktale Geometrie I und II*.

Dr. Wolf Bayer, Hans-und-Hilde-Coppi-Schule, 10318 Berlin
wolf.bayer@gmx.de

1 Das Newton-Verfahren

Angenommen, wir benötigen Lösungen der Gleichung $4x^3 = 5x - \frac{2}{3}$ bzw. Nullstellen der Funktion

$$x \rightarrow f(x) = 4x^3 - 5x + \frac{2}{3}.$$

Algebraische Methoden mit Äquivalenz- Umformungen scheitern. Steht ein PC zur Verfügung, so werden wir den Bisektions- Algorithmus oder Regula Falsi oder ein passendes Iterations-Verfahren anwenden. Diese Methoden liefern in jedem Fall eine Lösung, sofern man in einem Intervall $[a, b]$ mit $f(a) \cdot f(b) < 0$ den Algorithmus startet. Diese Bedingung erfüllt f für $a = 0$ und $b = 1$. Steht kein PC zur Verfügung, so wird man sich für das Newton-Verfahren entscheiden, da es bereits nach wenigen Iterations-Schritten hinreichend gute Näherungswerte für die Nullstelle liefert. Nachteil: der Algorithmus konvergiert manchmal gegen die Nullstelle x^* und manchmal nicht.

Ein beliebtes Unterrichts-Thema ist ein Wettlauf der Algorithmen Bisektion, Regula Falsi mit einem Iterationsverfahren und dem Newton-Verfahren. Das Ergebnis zeigt Bild 1.

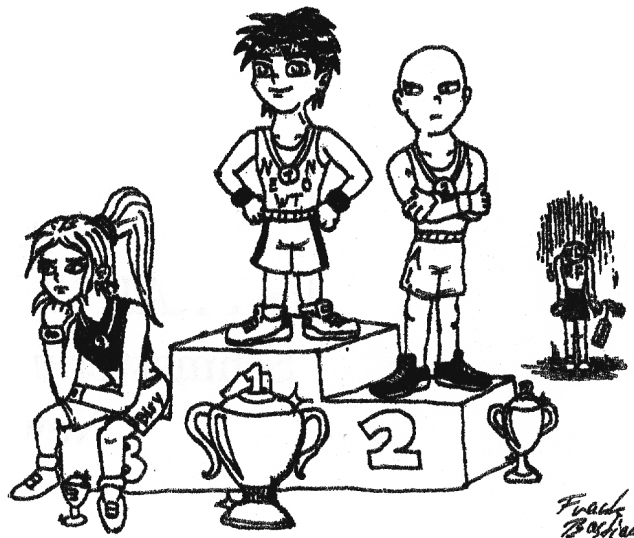


Abbildung 1:

Das dynamische System Newton-Algorithmus

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar und $f(a) \cdot f(b) < 0$.

1. Setze $\phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ {Iterations - Funktion} (1)

2. Wähle Näherungswert x_0 , $a < x_0 < b$
3. Berechne für $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$x_{n+1} = \phi(x_n) \tag{2}$$

bis $|f(x_n)|$ klein genug, z.B. < 0.001 .

4. Ausgabe: Nullstelle $x^* \approx x_n$.

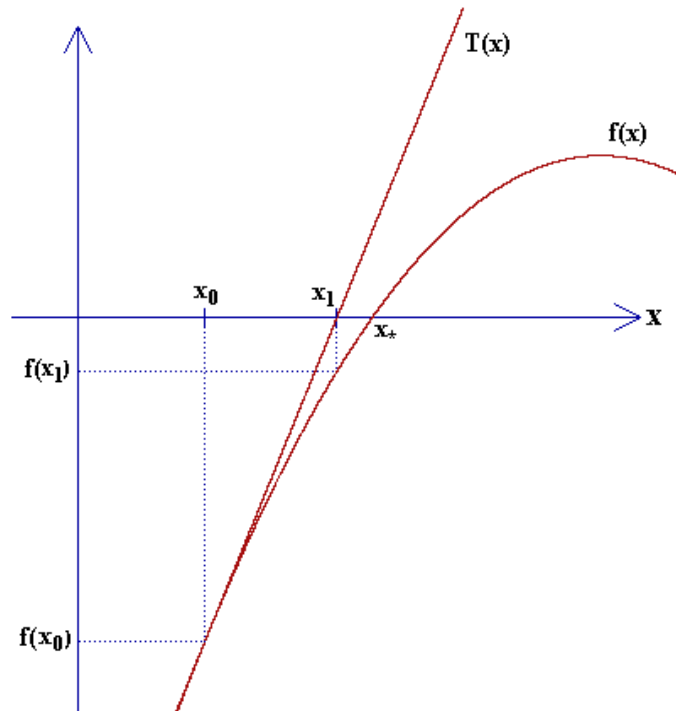


Abbildung 2:

Die Idee ist dabei folgende, siehe Bild 2. Im Punkt $(x_0, f(x_0))$ wird die Tangente $T(x)$ an die Funktion f gelegt.

$$T(x) = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

Die Nullstelle x_1 der Tangente $T(x)$ ist

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

und x_1 ist - meist - ein besserer Näherungswert für die wahre Nullstelle x^* als x_0 . Aus Tafelwerken kennen wir ein hinreichendes Kriterium.

Theorem 1 Hinreichendes Kriterium:

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(a) \cdot f(b) < 0$ und für jedes $x \in [a, b]$ gelte

$$\left| \frac{f''(x)f(x)}{[f'(x)]^2} \right| < 1, \quad (3)$$

dann konvergiert die Newton-Iterationsfolge (2) gegen die Nullstelle $x^* \in [a, b]$.

Dieses Kriterium folgt aus dem Banach'schen Fixpunktsatz. Dieser lautet:

Theorem 2 Banach'scher Fixpunktsatz

Sei $I \subset \mathbb{R}$ abgeschlossenes Intervall und $\phi : I \rightarrow I$ Kontraktion. Dann gelten:

A: Es existiert genau ein Fixpunkt $x^* \in I$ von ϕ .

B: Jede Iterationsfolge des Typs (2) mit $x_0 \in I$ konvergiert gegen x^* .

Beweis des hinreichenden Kriteriums:

Aus den Voraussetzungen folgt mit dem Theorem von Bolzano die Existenz mindestens einer Nullstelle in $[a, b]$ und dass f zwei Mal differenzierbar ist. Weiter folgt, dass $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$ erfüllt ist, andernfalls würde der Bruch sehr große Werte annehmen. Folglich ist f streng monoton steigend oder streng monoton fallend. Daher existiert genau eine Nullstelle x^* in $[a, b]$. Diese ist, siehe (1), Fixpunkt von ϕ . Aus (1) bestimmen wir ϕ und ϕ' und erhalten

$$\phi'(x) = \frac{f(x) f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

ϕ ist damit stetig und differenzierbar. Die Voraussetzung des Kriteriums besagt somit: für alle $x \in [a, b]$ gilt $|\phi'(x)| < 1$. Da $[a, b]$ abgeschlossen und damit kompakt ist, folgt $\max_{x \in [a, b]} |\phi'(x)| < 1$. Dann existiert aber eine Zahl q mit $\max_{x \in [a, b]} |\phi'(x)| < q < 1$.

Wir zeigen ϕ ist Kontraktion: Sei $x \in [a, b], y \in [a, b], x < y$. Mit dem Mittelwertsatz folgt für ein ξ mit $x < \xi < y$

$$|\phi(x) - \phi(y)| = |\phi'(\xi)(x - y)| = |\phi'(\xi)| |x - y| < q |x - y|.$$

Wir zeigen: $\phi([a, b]) \subset [a, b]$:

Sei o.B.d.A. f streng monoton steigend. Dann gilt $f(a) < 0, f(b) > 0$ und $f'(x) > 0$. Weiter folgt mit (1)

$$\phi(a) = a - \frac{f(a)}{f'(a)} > a \quad \text{und} \quad \phi(b) = b - \frac{f(b)}{f'(b)} < b.$$

Damit sind die Voraussetzungen von Banach erfüllt, es folgt die Konvergenz jeder Iterationsfolge (2) gegen den Fixpunkt x^* von ϕ , und dieser entspricht der Nullstelle von f , siehe (1). qed

Eine Folge, die durch eine Iterationsfunktion wie (1) nach der Formel (2) erzeugt wird, nennt man ein *dynamisches System*.

Aufgabe 1 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $x \rightarrow f(x) := 4x^3 - 5x + \frac{2}{3}$ auf den Bildschirm und bestimmen Sie mit dem Newton-Algorithmus die Nullstelle zwischen 0 und 1.

2 Die Unzuverlässigkeit des Newton-Verfahrens

Wir stellen einige *Newton-Versager* vor.

Aufgabe 2

Suchen Sie mit dem Newton-Algorithmus Nullstellen der Funktion

$$x \rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1,$$

Startwert sei $x_0 = 2$.

Aufgabe 3 *Periodisches Pendeln*

Suchen Sie Nullstellen der Funktion $x \rightarrow f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{19}{8}x^2 + \frac{25}{8}x - \frac{1}{8}$,

Startwert sei $x_0 = 1$.

Aufgabe 4 Fluchtpunkt ∞

Suchen Sie mit einem geeigneten PC-Programm Nullstellen der Funktion

$$x \rightarrow f(x) = \text{ARCTAN}(x), \quad f' \text{ siehe Tafelwerk.}$$

A. Startwert sei $x_0 = 1.5$.

B. Startwert sei $x_0 = 1$.

C. Bestimmen Sie mit dem PC durch Intervall-Schachtelung die Grenze zwischen dem Limes-Verhalten von A und B.

D. Skizzieren Sie den Graphen von ARCTAN und überlegen Sie:

Wie verhält sich der Newton-Algorithmus, wenn man ihn mit der in Teil C ermittelten Grenze startet?

Wir halten fest: Es gibt vier verschiedene Ausgänge des Newton-Verfahrens:

1. Die Iterations-Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen eine Nullstelle.
2. Ein Nenner wird 0, die Iterations-Folge findet einen Hoch- oder Tiefpunkt.
3. Die Folge wandert aus, sie wächst unbeschränkt in Richtung ∞ .
4. Die Folge endet in einem Zyklus und kreist in diesem für alle Zeiten.

Soweit so gut und schon lange bekannt. Alles noch ganz ordentlich, kein Chaos. Lesen Sie weiter!

3 Periode 3 und doch kein Chaos

Diesen Abschnitt entnahmen wir dem Jugend-Forscht-Beitrag 2007 (Berlin) von Maria Hempel, damals Abiturientin an Hans-und-Hilde-Coppi-Gymnasium.

Das Jahr 1975 kann wohl zu Recht als Geburtsjahr des mathematischen Chaos gesehen werden, unter anderem erschien der Artikel *period three implies chaos* von T.-Y. Li und J.A. Yorke. Der Titel dieses Artikels besagt in der

Kurzfassung Li/Yorke:

Gibt es eine Iterationsfolge mit einem periodischen Punkt der Periode 3, so herrscht Chaos.

Wir geben eine präzise und etwas verständlichere Fassung:

Theorem 3 *Li/Yorke 1975*

Sei $\phi : [a, b] \rightarrow [a, b]$ stetig und gibt es Punkte $x_0, x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_0 < x_1 < x_2$ und

$$x_1 = \phi(x_0), \quad x_2 = \phi(x_1), \quad \phi(x_2) \leq x_0, \quad \{\text{Sissiphos-Bedingung}\}$$

so herrscht Chaos, d.h.

1. Es gibt für jedes $n \in \mathbb{N}$ periodische Punkte mit Periode n .
2. An jedem $x \in [a, b]$ wirkt der Schmetterlings-Effekt.

Eigenschaft 2. bedeutet: Startet man zwei Iterationsfolgen an Startpunkten x_0 und y_0 , die sich nur um ganz wenig unterscheiden, z.B. $y_0 := x_0 + 0.000001$, so bleiben die Folgenwerte x_n und y_n für wachsendes n nicht nahe zusammen, sondern entfernen sich weit voneinander.

Maria Hempel versuchte nun mit den Voraussetzungen von Li/Yorke Chaos im Newton-Verfahren nachzuweisen. Dazu konstruierte sie ein Polynom p , bei dem das Newton-Verfahren eine Folge mit Periode 3 durchläuft: Wir geben p und dessen Newton-Iterationsfunktion ϕ an:

$$x \rightarrow p(x) := \frac{13}{144}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - 13x + 1, \quad (4)$$

$$x\phi(x) = x - \frac{p(x)}{p'(x)} = \frac{x^3 - 8x^2 - 72}{\frac{39}{2}x^2 - 16x - 24}. \quad (5)$$

Wir suchen die Nullstelle von und starten den Newton-Algorithmus mit

$$x_0 := 3 \quad \text{und erhalten aus (2)}$$

$$x_1 = \phi(x_0) = \phi(3) = 2,$$

$$x_2 = \phi(x_1) = \phi(2) = 0 \quad \text{und}$$

$$x_3 = \phi(x_2) = \phi(0) = 3 = x_0.$$

Der Algorithmus durchläuft einen Zyklus mit Periode 3. In Bild 3 ist das Polynom

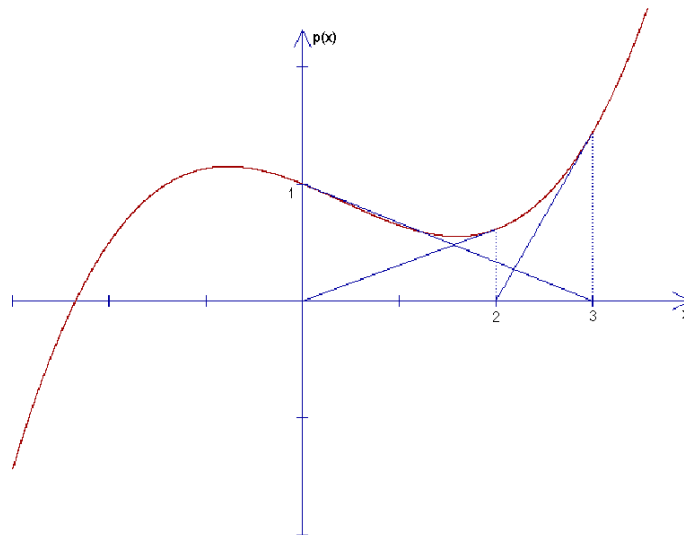


Abbildung 3:

p und seine Tangenten in 0, 2 und 3 dargestellt, der Zyklus wird sichtbar. Damit ist die Kurzfassung von Li/Yorke erfüllt, nach ihr müsste Chaos herrschen. Doch dem ist nicht so, wenn man andere Startwerte verwendet. Der Algorithmus zeigt *Ordnung*, er findet für jeden Startwert $x_0 \neq 0, \neq 2$ und $\neq 3$ die tatsächliche Nullstelle des Polynoms $x^* \approx -2.34888$, siehe Bild 3.

Das Hempel-Polynom p mit der Periode 3 rückt zwar den Newton-Algorithmus in die Nähe von Chaos, jedoch ist eine Voraussetzung des Theorems von Li und Yorke verletzt, und zwar

$$\phi : [a, b] \rightarrow [a, b].$$

Dies zeigt der Graph von ϕ in Bild 4. Die Funktion ϕ bildet das Intervall $[0, 3]$ in zwei unbeschränkte Intervalle ab. Daher musste dieser Ansatz eines Chaos-Beweises scheitern.

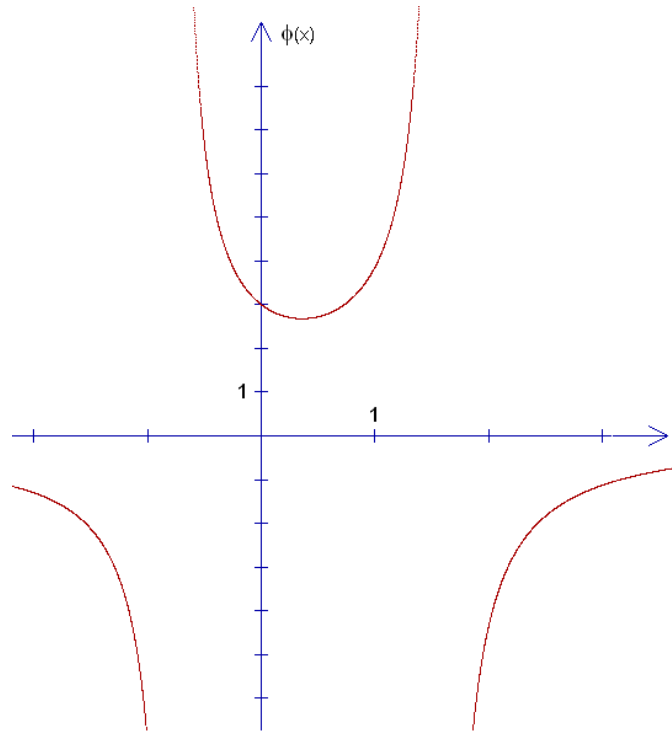


Abbildung 4:

Aufgabe 5 *Periode 3 impliziert Chaos*

Suchen Sie im Internet nach Li und Yorke, z.B. mit der Eingabe *period three implies chaos*, nach dem Schmetterlingseffekt und nach der Sissiphos-Bedingung. Warum trägt diese Bedingung diesen Namen? Wer war Sissiphos?

Aufgabe 6 *Iterationsfunktion ϕ*

Leiten Sie aus dem Hempel-Polynom p , siehe (4), seine Newton-Iterationsfunktion ϕ , siehe (5), her.

Aufgabe 7 *Nullstelle*

Bestimmen Sie mit dem Newton-Algorithmus die Nullstelle x^* des Hempel-Polynoms p , siehe (4).

Aufgabe 8 *Periode 4*

Konstruieren Sie ein Polynom p , bei dem der Newton-Algorithmus einen Zyklus mit Periode 4 durchläuft.

4 Attraktions-Bereiche

Wir wählen die einfachste Funktion, die drei Nullstellen besitzt:

$$x \rightarrow f(x) := x^3 - x,$$

siehe Bild 5. Diese Funktion ist differenzierbar in \mathbb{R} , sie besitzt die Nullstellen $-1, 0, 1$, und Hoch- bzw. Tiefpunkte bei $(-\frac{1}{\sqrt{3}}/\frac{2}{3\sqrt{3}})$ und $(\frac{1}{\sqrt{3}}/\frac{2}{3\sqrt{3}}) \approx (0.57735/-0.385)$. Mit

(1) bestimmen wir die Iterationsfunktion ϕ und deren 1. Ableitung ϕ' :

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 - x}{3x^2 - 1} = \frac{2x^3}{3x^2 - 1}, \quad (6)$$

$$\phi'(x) = 6 \frac{x^2(x^2 - 1)}{(3x^2 - 1)^2} \quad (7)$$

siehe Bild 6, ϕ besitzt Fixpunkte wo f Nullstellen besitzt, also bei 1, 0 und -1. Sie sind als Schnittpunkte mit der 1. Mediane in Bild 6 zu erkennen.

ϕ besitzt **periodische Punkte mit Periode 2**, $\frac{1}{\sqrt{5}}$ und $-\frac{1}{\sqrt{5}}$, denn mit (6) berechnet sich

$$\phi\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^3}{3\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{und} \quad \phi\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^3}{3\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Mit einem dieser Werte als Startpunkt zeigt der Algorithmus zyklisches Verhalten, er pendelt zwischen den Punkten $\frac{1}{\sqrt{5}}$ und $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ hin und her. In Bild 5 ist dieses Pendeln zu erkennen.

Wir fragen jetzt nach den Attraktions-Bereichen der drei Nullstellen (attraktiv=anziehend).

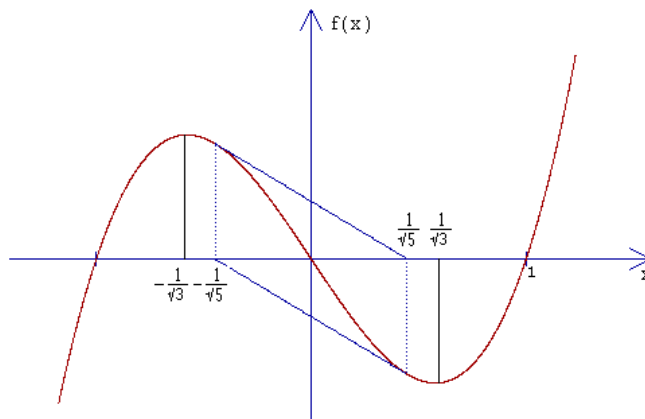


Abbildung 5:

Welche Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}$ werden durch den Newton-Algorithmus in die Nullstelle -1 geführt? Und welche Startwerte in die 0? Und welche in die 1?

Definition 1 *Attraktions-Bereiche*

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Iterations-Folge des Newton- Algorithmus (2) für f . Mit A_1, A_0, A_{-1} bezeichnen wir die Mengen aller Startwerte

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{x_0 \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1\}, \\ A_0 &:= \{x_0 \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}, \\ A_{-1} &:= \{x_0 \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1\}. \end{aligned}$$

Bei Betrachtung von Bild 5 vermutet man: Startwerte x_0 oberhalb des Tiefpunkts $\frac{1}{\sqrt{3}}$ werden durch den Newton-Algorithmus in die Nullstelle 1 geführt. Analog ergibt sich, dass Startwerte x_0 unterhalb des Hochpunkts $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ in die Nullstelle -1 geführt werden. Und Startwerte zwischen $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ und $\frac{1}{\sqrt{5}}$ werden wohl zur Nullstelle 0 geführt werden.

Theorem 4 *Attraktions-Bereiche von $-1, 0, 1$*

A: $] \frac{1}{\sqrt{3}}, \infty[\subset A_1$, d.h. Startwerte x_0 mit $\frac{1}{\sqrt{3}} < x_0$ werden zur 1 geführt.

B: $] -\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}[\subset A_{-1}$, d.h. Startwerte x_0 mit $x_0 < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ werden zur -1 geführt.

C: $] -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}[\subset A_0$, d.h. Startwerte x_0 mit $-\frac{1}{\sqrt{5}} < x_0 < \frac{1}{\sqrt{5}}$ werden zur 0 geführt.

Für den Beweis benötigen wir das Hinreichende Kriterium (3), wir setzen

$$g(x) := \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{(x^3 - x)6x}{(3x^2 - 1)^2} = \frac{2}{3} \frac{x^4 - x^2}{(x^2 - \frac{1}{3})^2} \text{ und erhalten}$$

$$g'(x) = \frac{4}{9} x \frac{1 + x^2}{(x^2 - \frac{1}{3})^3}.$$

Beweis A:

Fall 1, sei $1 < x_0$. Die Funktion g hat die Eigenschaften $g(1) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \frac{2}{3}$, und sie ist im Intervall $[1, \infty[$ streng monoton steigend, siehe g' . Folglich gilt für alle $x > 1$ $|g(x)| < \frac{2}{3} < 1$. Kriterium (3) ist erfüllt und der Newton-Algorithmus konvergiert zur Nullstelle 1.

Fall 2, sei $\frac{1}{\sqrt{3}} < x_0 < 1$. Wir bestimmen mit (6) den Nachfolger x_1 von x_0 :

$x_1 = \phi(x_0) = \frac{2x_0^3}{3x_0^2 - 1}$. Da die Funktion ϕ in diesem Intervall streng monoton fällt, siehe Bild 6, liegt ihr Minimum am oberen Rand, also bei 1. Daher gilt

$x_1 = \phi(x_0) > \phi(1) = 1$. Für x_1 ist Fall 1 eingetreten, Kriterium (3) ist erfüllt und die Iterationsfolge konvergiert gegen die 1.

Beweis B: Analog zu A wegen der Punktsymmetrie von f .

Beweis C:

Sei $|x_0| < \frac{1}{\sqrt{5}}$. Wir zeigen: Die Folge $(|x_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallende Nullfolge. Wir setzen $q := \frac{2x_0^2}{1 - 3x_0^2}$, der Nenner ist wegen $1 - 3x_0^2 > 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} > 0$ positiv, und daher gilt $q > 0$. Und es gilt $q < 1$:

$$q = \frac{2x_0^2}{1 - 3x_0^2} < 1 \iff 2x_0^2 < 1 - 3x_0^2 \iff 5x_0^2 < 1 \iff |x_0| < \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Mit (6) ergibt sich für die Nachfolger x_1 und x_2

$$|x_1| = |\phi(x_0)| = \left| \frac{2x_0^3}{3x_0^2 - 1} \right| = |x_0| \frac{2x_0^2}{1 - 3x_0^2} = q|x_0|, \quad \text{also}$$

$$|x_1| = q|x_0| \text{ und } |x_1| < |x_0|.$$

$$|x_2| = |\phi(x_1)| = \left| \frac{2x_1^3}{3x_1^2 - 1} \right| = |x_1| \frac{2x_1^2}{1 - 3x_1^2}$$

$$< |x_1| \frac{2x_0^2}{1 - 3x_0^2} = q|x_1| = q^2|x_0|, \quad \text{also}$$

$$|x_2| < q^2|x_0| \text{ und } |x_2| < |x_1|.$$

Wir schließen induktiv weiter

$$\begin{aligned}
|x_{n+1}| &= |\phi(x_n)| = \left| \frac{2x_n^3}{3x_n^2 - 1} \right| = \\
&= |x_n| \frac{2x_n^2}{1 - 3x_n^2} < |x_n| \frac{2x_{n-1}^2}{1 - 3x_{n-1}^2} < \dots < |x_n| \frac{2x_0^2}{1 - 3x_0^2} \\
&= q|x_n| = q q^n |x_0| = q^{n+1} |x_0|, \quad \text{also} \\
|x_{n+1}| &< q^{n+1} |x_0| \text{ und } |x_{n+1}| < |x_n|.
\end{aligned}$$

Die Folge $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert wegen $0 < q < 1$ für wachsendes n gegen Null und majorisiert die Folge $(|x_n|)_{n \in \mathbb{N}}$. *qed.*

Wir ergänzen die Aussagen A, B und C des Theorems durch Aussagen über

Besondere Punkte:

1. Startet man den Newton-Algorithmus an einer der Nullstellen 1, 0 oder -1, so erhält man eine konstante Folge, da diese Nullstellen Fixpunkte von ϕ sind.
2. Startet man den Newton-Algorithmus an $\frac{1}{\sqrt{5}}$ oder $-\frac{1}{\sqrt{5}}$, so erhält man eine periodische Folge.
3. Startet man dagegen am Hochpunkt oder Tiefpunkt $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ oder $\frac{1}{\sqrt{3}}$, so endet der Algorithmus in einem Nenner = 0, siehe (6).

Weder in den Mengen A_{-1}, A_0, A_1 von Theorem 4 noch in den besonderen Startpunkten haben wir Chaos gefunden. Es wurden die Bereiche, in denen Ordnung herrscht, abgeklärt. Aber es bleibt noch das Schicksal von Iterationsfolgen in den Intervallen $|\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{3}}|$ und $|\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}|$ zu untersuchen. Wegen der Punktsymmetrie von f betrachten wir nur das erste Intervall. Was passiert mit einem Startwert x_0 mit $\frac{1}{\sqrt{5}} < x_0 < \frac{1}{\sqrt{3}}$?

Eine Konvergenz zur Nullstelle 0 können wir ausschließen, betrachten Sie Bild 6. Über

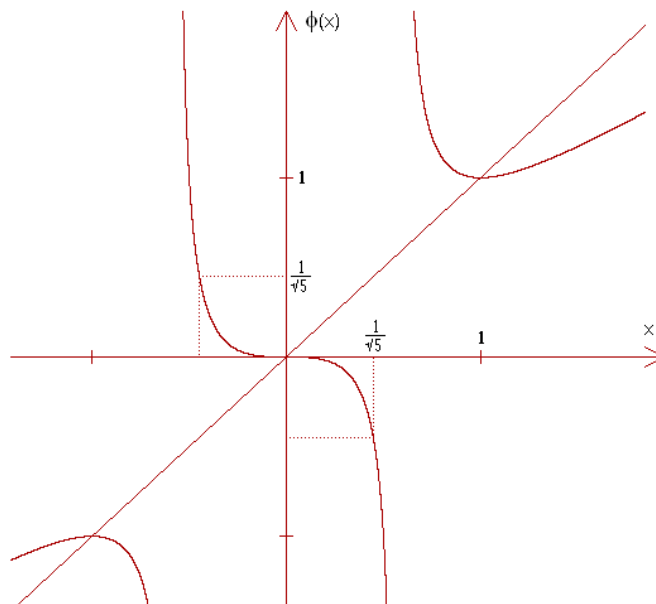


Abbildung 6:

dem Intervall $|\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{3}}|$ ist ϕ bijektiv, zu jedem x-Wert gibt es genau einen y-Wert. Kein zweiter x-Wert wird durch ϕ in dieses Intervall geführt. Daher kann es keinen 'Eindringling' von außerhalb geben, welcher dann zur 0 wandern würde.

Somit bleiben als mögliche Grenzwerte für einen Startpunkt x_0 aus einem der Intervalle $|\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{3}}|$ oder $|\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}|$ nur die beiden Nullstellen 1 und -1.

Aufgabe 9 Nullstellen von f

Verifizieren Sie die Aussagen in Theorem 4 durch Eingabe verschiedener Startwerte x_0 in Ihr Programm Newton-Algorithmus für Nullstellen der Funktion $x \rightarrow x^3 - x$.

Aufgabe 10 Graph von ϕ

Erstellen Sie eine Kurvendiskussion der Funktion ϕ , siehe (6). Bestätigen Sie die Aussagen dieses Abschnitts und von Bild 6 über ϕ .

5 Der Schmetterlingseffekt

Der Flügelschlag eines Schmetterlings in China kann einen Hurrican in Texas auslösen oder

kleine Ursachen können große Wirkungen entfalten

oder

eine winzig kleine Differenz von Startwerten kann ein sehr unterschiedliches Limesverhalten bewirken.

Im vorigen Abschnitt wurde u.a. das Limesverhalten des Newton-Algorithmus für Startwerte x_0 aus dem Intervalls $|\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}|$ geklärt, jede dieser Folge ist Nullfolge. Wir untersuchen und vergleichen nun das Limesverhalten von 4 Startwerten am Randpunkt $\frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.447213596\dots$ dieses Intervalls. Alle 4 Startwerte liegen in dem sehr kleinen Intervall $[0.4472, 0.4473]$ mit der Breite 0.0001, der erste liegt innerhalb von $|\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}|$, die anderen außerhalb. Der zweite Startwert ist Randpunkt.

Startwert $x_0 =$	0.44720	$\frac{1}{\sqrt{5}} =$	0.44721	0.44724	0.44730
$x_1 =$	-0.44713	$-\frac{1}{\sqrt{5}} =$	-0.44721	-0.44737	-0.44773
$x_2 =$	0.44672		0.44721	0.44817	0.45034
$x_3 =$	-0.44429		-0.44721	-0.45297	-0.46648
$x_4 =$	0.43010		0.44721	0.48351	0.58471
$x_5 =$	-0.35755		-0.44721	-0.75695	15.59092
$x_6 =$	0.14830		0.44721	-1.20658	10.40822
$x_7 =$	-0.00698		-0.44721	-1.04325	6.96023
$x_8 =$	0.00000		0.44721	-1.00255	4.67230
$x_9 =$				-1.00001	3.16317
$x_{10} =$				-1.00000	2.18145
$x_{11} =$					1.56384
$x_{12} =$					1.20709
$x_{13} =$					1.04343
$x_{14} =$					1.00257
$x_{15} =$					1.00001
$x_{16} =$					1.00000

Wir beobachten vier verschiedene Verhaltensweisen des Newton-Algorithmus (2). Die Folge des ersten Startwerts wandert zur Nullstelle 0, die des zweiten $\frac{1}{\sqrt{5}}$ pendelt zwischen diesem und $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ hin und her; die Folge des dritten Startwerts strebt zur Nullstelle

-1 und die des vierten endet nach Umwegen in der 1. Siehe Bild 7. Wir erkennen:

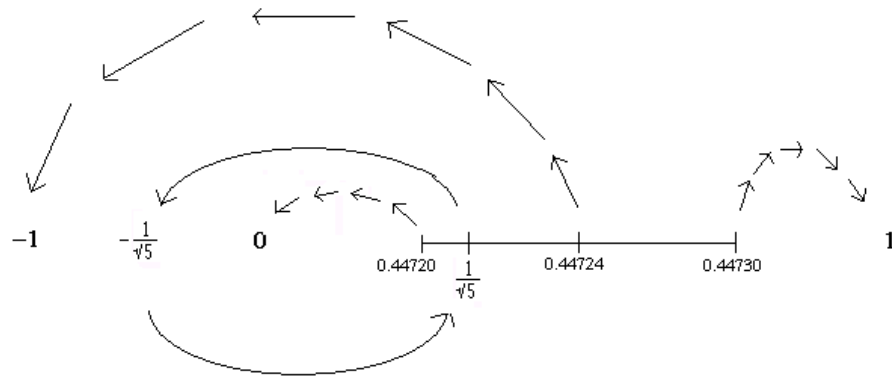


Abbildung 7:

Alle drei Attraktions-Bereiche A_1, A_0, A_{-1} besitzen gemeinsame Punkte mit dem Intervall $[0.4472, 0.4473]$!

Damit zeigt das dynamische System Newton-Algorithmus typisches chaotisches Verhalten, es ist nicht vorhersehbar, welche Nullstelle gefunden wird, wenn man in diesem Intervall startet. Dieses Verhalten nennt man *Schmetterlings-Effekt* oder *sensitive Abhängigkeit von der Anfangsbedingung x_0* . Eine kleine Abweichung in der fünften Nachkommastelle bewirkt ein völlig anderes Limes-Verhalten des Algorithmus und liefert so ein ganz anderes Ergebnis.

Aufgabe 11 *Schmetterlingseffekt*

Starten Sie Ihr Programm Newton-Algorithmus mit den vier Startwerten, bestätigen Sie den Schmetterlingseffekt im Intervall $[0.4472, 0.4473]$.

6 Die Graphik der Attraktions-Bereiche

Wir stellen nun einen Algorithmus vor, der die drei Attraktions-Bereiche A_1, A_0 und A_{-1} der Funktion f visuell präsentiert. Alle Startwerte $x_0 \in [-1, 1]$, die vom Newton-Algorithmus in die Nullstelle -1 geführt werden, werden gelb markiert und mit kleiner Strichlänge, alle die zur 0 geführt werden werden rot und mit mittlerer Strichlänge und alle, die zur 1 wandern werden grün und mit großer Strichlänge gezeichnet.

Programm Attraktions-Bereiche

unten:=-1, oben:=1, schrittweite:=0.001, xcent:=600, ycent:=400, xMF:=600 {z.B.}

startwert:=unten

REPEAT startwert:=startwert+schrittweite

x:=startwert

FOR i:=1 TO 30 DO

$x := \phi(x)$ {Newton-Iteration}

IF $x \approx -1$ THEN farbe:= gelb, strichlänge:= 4 (Pixel)

IF $x \approx 0$ THEN farbe:= rot, strichlänge:= 6

IF $x \approx 1$ THEN farbe:= grün, strichlänge:= 8

zeichne-strich(startwert)

UNTIL startwert>oben

PROC *zeichne-strich*(startwert:REAL)

{ zeichnet einen senkrechten Strich der Länge *strichlänge* auf der x-Achse
beim *x*-Wert *startwert* }

setcolor(*farbe*)

xxx:=xcent+round(startwert*xMF)

LINE(xxx,ycent-strichlänge,xxx,ycent+strichlänge)

Wir sehen in Bild 8: Die untere Grenze des Attraktions-Bereichs A_1 ist der Tiefpunkt

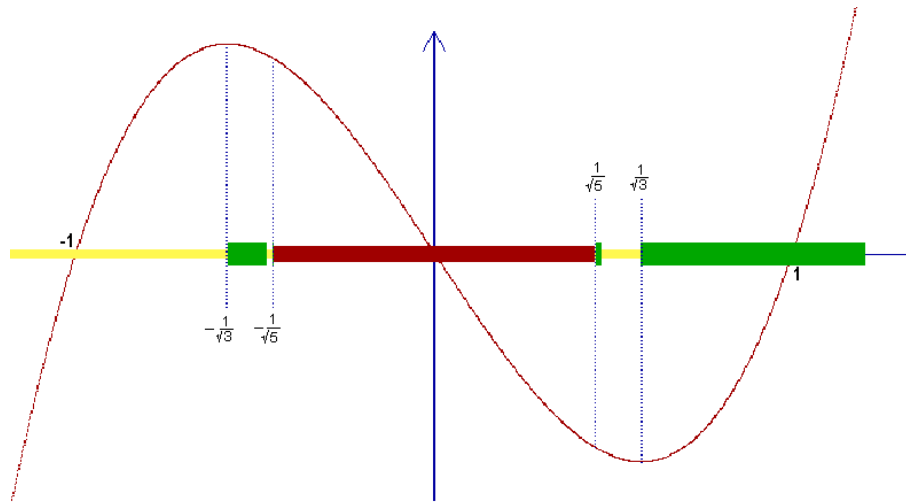


Abbildung 8:

bei $\frac{1}{\sqrt{3}}$ und die obere Grenze von A_{-1} ist der Hochpunkt bei $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Des Weiteren erkennt man: Die Grenzen des Attraktions-Bereichs A_0 sind die periodischen Punkte $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ und $\frac{1}{\sqrt{5}}$. Zwischen $\frac{1}{\sqrt{5}}$ und $\frac{1}{\sqrt{3}}$ finden wir sowohl Startwerte von A_1 als auch von A_{-1} . Bei $\frac{1}{\sqrt{5}}$ scheint eine Grenze zwischen A_1 und A_0 zu sein. Wir zoomen in das Bild hinein und erkennen, dass dies falsch ist; es schieben sich Startwerte aus A_{-1} dazwischen, siehe Bild 9. Weiteres Hineinzoomen zeigt, dass der periodische Punkt $\frac{1}{\sqrt{5}}$ zwar obere Grenze



Abbildung 9:

von A_0 ist, aber nicht untere Grenze von A_1 . Es schieben sich immer wieder Startwerte dazwischen, die durch den Algorithmus zur -1 geführt werden, siehe Bild 10.

Ein ähnliches Verhalten kennen wir bereits von der Cantor-Menge. Weiße Intervalle

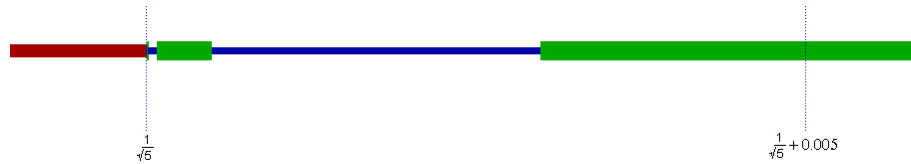


Abbildung 10:

schieben sich immer wieder in die schwarzen Intervalle hinein.

In [Becker/Dörfler] werden die Grenzen der sich immer wieder hinein schiebenden Intervalle angegeben.

Aufgabe 12

Implementieren Sie das Programm Attraktions-Bereiche, erzeugen Sie Bild 8. Zoomen Sie in Ihr Bild hinein, indem Sie unten, oben und schrittweise verändern.

Zum Weiterarbeiten, noch unveröffentlicht:

Aufgabe 13

Untersuchen Sie Attraktions-Bereiche von einer Funktion f , welche 4 (oder 5) Nullstellen besitzt.

Dank an Frank Bastian (Abiturient 2007 Coppi-Schule) für Bild 1.

7 Bezogene Literatur

Becker, Karl-Heinz; **Dörfler**, Michael *Dynamische Systeme und Fraktale*
Vieweg-Verlag Braunschweig/Wiesbaden (1992) ISBN 3-528-34461-X

Hempel, Maria *Newton trifft Sissiphos*
Beitrag zum Wettbewerb 'jugend forscht' Berlin-Süd 2007

Peitgen, H.-O., **Jürgens**, H., **Saupe**, D. Bremen Gruppe
Bausteine des Chaos - Fraktale
Springer-Klett-Cotta Berlin Heidelberg Stuttgart (1992)

Peitgen, H.-O., **Jürgens**, H., **Saupe**, D. Bremen Gruppe
Chaos - Bausteine der Ordnung
Springer-Klett-Cotta Berlin Heidelberg Stuttgart (1994)

Peitgen, H.-O., **Jürgens**, H., **Saupe**, D. Bremen Gruppe
Fraktale im Gespräch Video-Film
gibt es sicher in kommunalen Bibliotheken