

MATHEMATISCHE MONSTER - ALGORITHMEN der FRAKTALEN GEOMETRIE II

Wolf Bayer

24. Februar 2010

Zusammenfassung

Viele Formen der Natur lassen sich nicht mit der klassischen, auf Euklid basierenden Mathematik beschreiben. Eine Wolke ist eben keine Kugel, ein Farn kein Dreieck, ein Baum kein Kegel und ein Blitz keine Linie. Benoit Mandelbrot, Michael Barnsley und die sogenannte *Bremen Gruppe* um Hans-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens, Dietmar Saupe legten ein neues Konzept der Geometrie vor, die *Fraktale Geometrie*. Sie dient heute dem besseren Verständnis z.B. von Turbulenzen, von Galaxienhaufen, des Einzugsbereichs eines Flusses, des Gehirns von Säugetieren, der menschlichen Lunge oder einer Küstenlinie. Sogar Börsenkurse zeigen fraktales Verhalten.



Satellitenbild der Alpen

www.susannealbers.de/

Das Satellitenbild der Alpen zeigt, dass die Erde weder eine Scheibe noch eine Kugel ist, denn an keiner Stelle in den Alpen lässt sich eine Tangential-Ebene anlegen. Die Erdoberfläche ist dort durch Kanten und Ecken bestimmt, kurz: sie ist nicht differenzierbar. Das bedeutet: sie ist ein Fraktal.

Die Artikelfolge *Algorithmen der Fraktalen Geometrie* soll zum Ersten Kollegen/innen grundlegende Kenntnisse der Fraktalen Geometrie vermitteln, dabei wird im Wesentlichen nur Wissen der Schulmathematik verwandt. Theoreme neueren Datums werden vorgestellt und erläutert, ohne tiefer auf die mathematischen Hintergründe einzugehen. Zum Zweiten bietet die Serie eine Vielzahl von Algorithmen, die Informatik-Unterricht bereichern und eine Ausbildung in Richtung Technische Intelligenz vorbereiten. Algorithmen sind in Pseudo-Code notiert.

Zum Dritten ist die Serie für uns Vorlage und Unterrichtsmaterial für Seminarkurse. Eine Fülle von Fragestellungen werden angesprochen, so dass die eine oder andere zur Vertiefung animieren kann und so Seminarthemen gefunden werden. Daher haben die Artikel sowohl Lehrbuch- als auch Schulbuchcharakter.

1 Die EUKLID-Dimension

Seit über 2000 Jahren kennt die Mathematik den Begriff der *Dimension*. Einem Punkt weist man die Dimension 0 zu, einer Geraden, Linie oder Strecke die Dimension 1, einer Fläche die Dimension 2 und einem Körper wie z.B. einer Kugel, einem Quader, oder einer Pyramide die Dimension 3. Auch höhere Dimensionen sind heute bekannt, in Einsteins *Raum-Zeit-Kontinuum* finden wir die Dimension 4.

Euklid-Dimension D

D	Objekte
0	Punkt
1	Linie: Gerade, Strecke
2	Fläche: Viereck, Dreieck, Kreis, n -Eck . . .
3	Raum: Würfel, Quader, Kugel, Polyeder, Platonische Körper. . .
4	Raum-Zeit-Kontinuum

Um die Bahnen von Satelliten zu beschreiben, formulieren Physiker Vektoren eines Raums der Dimension 7, drei Koordinaten geben den Ort des Satelliten an, drei weitere die Geschwindigkeitskomponenten in jeder der drei Richtungen und eine informiert über den Zeitpunkt. Der Satellit durchwandert somit mathematisch eine Linie (Dimension 1), die in einem 7-dimensionalen Raum enthalten ist.

2 Die Selbstähnlichkeits-Dimension

Diesen Dimensions-Begriff verdanken wir Felix Hausdorff (1868-1942), Mathematiker, Topologe in Breslau, Greifswald und Bonn. Er brachte sich 1942 wegen rassistischer Verfolgung um. Hausdorff fand 1919 eine mathematische Definition für die Dimension

einer Menge, die mit der Euklid-Definition übereinstimmt. Hausdorff dachte sich eine Strecke der Länge 1 und legte sie im Geiste unter einen Kopierer, bei dem er den Verkleinerungsfaktor vorher auf z.B. $s = \frac{1}{5}$ eingestellt hatte. Als Kopie erhielt er ebenfalls eine Strecke, und zwar der Länge $\frac{1}{5}$, siehe Abbildung 1. Um das Längenmaß 1 der Originalstrecke zu überdecken, musste er $a = 5$ solcher Kopie zusammenfügen.

Hausdorff stellte eine mathematische Gleichung auf, die den Verkleinerungsfaktor s , die Anzahl a und eine Unbekannte D enthält:

$$\text{Hausdorff-Formel} \quad a = \frac{1}{s^D} \quad (1)$$

Wir setzen $a = 5$ und $s = \frac{1}{5}$ ein und erhalten

$$5 = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^D} = \frac{1}{\frac{1}{5^D}} = \frac{5^D}{1} = 5^D.$$

Linke und rechte Seite dieser Gleichung stimmen überein, sofern $D = 1$ ist. Eine Strecke ist, siehe Euklid, ein Objekt der Dimension $D = 1$.

Auch wenn wir einen anderen Verkleinerungsfaktor wählen, z.B. $s = \frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{4}$, führt diese Gleichung auf die Dimension $D = 1$.

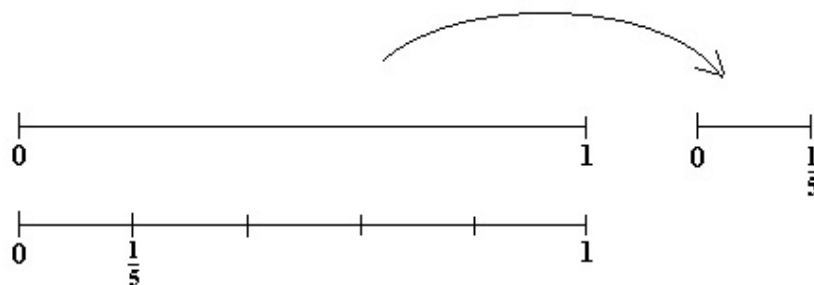


Abbildung 1: zur Dimensionsberechnung

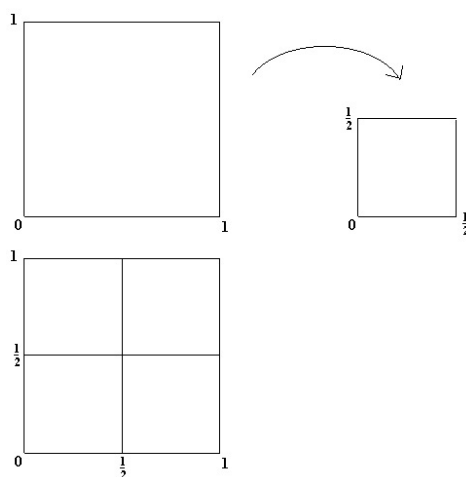


Abbildung 2: zur Dimensionsberechnung

Nun betrachten wir ein Objekt der Euklid-Dimension 2, ein Quadrat der Seitenlänge 1. Als Verkleinerungsfaktor wählen wir diesmal $s = \frac{1}{2}$, siehe Abbildung 2. Der

Kopierer erzeugt wieder ein Quadrat, dieses hat die Seitenlänge $\frac{1}{2}$ und das Flächenmaß $\frac{1}{4}$. Um das Originalquadrat zu überdecken, müssen $a = 4$ solcher Kopien zusammen gefügt werden. Die Werte für s und a in die Hausdorff-Formel (1) eingesetzt, führt zu

$$4 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^D} = \frac{1}{\frac{1}{2^D}} = \frac{2^D}{1} = 2^D.$$

Gleichheit herrscht für $D = 2$, wie bei einem Quadrat, d.h. einem Flächenobjekt, auch zu erwarten war, vergleiche Euklid-Dimension. Ein anderer Verkleinerungsfaktor s führt ebenfalls auf die Dimension $D = 2$.

Die Hausdorff-Formel funktioniert auch bei dreidimensionalen Objekten. Wir betrach-

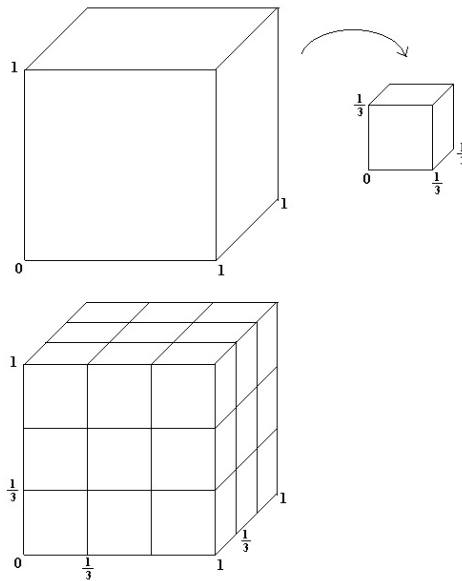


Abbildung 3: zur Dimensionsberechnung

ten den Würfel in Abbildung 3. Unter einen 'dreidimensionalen' Kopierer mit Verkleinerungsfaktor $s = \frac{1}{3}$ gelegt, ergibt sich ein Würfel der Kantenlänge $\frac{1}{3}$. Eine Anzahl von $a = 27$ dieser Kopien benötigt man, um den Originalwürfel zu überdecken. Diese Werte in (1) eingesetzt, ergibt

$$27 = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^D} = \frac{1}{\frac{1}{3^D}} = \frac{3^D}{1} = 3^D,$$

Gleichheit herrscht für $D = 3$. Wir erkennen, die Hausdorff-Formel liefert Dimensionszahlen, welche mit den Dimensionen von Euklid übereinstimmen.

Wichtig ist dabei die sogenannte *Selbstähnlichkeit*, der Kopierer erzeugt aus einer Strecke eine Strecke, aus einem Quadrat ein Quadrat und aus einem Würfel einen Würfel. Original und die Kopie sind sich selbst ähnlich. Die Selbstähnlichkeit ist in der Geometrie, insbesondere in der Theorie der Affinen Abbildungen wohlbekannt, selbstähnliche Abbildungen wurden dort bisher als *winkeltreue* oder als *Ähnlichkeits-Abbildungen* bezeichnet.

Wir stellen die Hausdorff-Formel nach D um und erhalten die

Selbstähnlichkeits-Dimension D von Felix Hausdorff

$$D = -\frac{\log(a)}{\log(s)} \quad (2)$$

mit dem **Verkleinerungsfaktor s** und der **Anzahl a der Kopien**, die zusammengefügt das Original überdecken. Diese Dimension wird nach Mandelbrot auch *Fraktale Dimension* genannt.

3 MATHEMATISCHE MONSTER

In den folgenden Abschnitten stellen wir klassische Fraktale vor, diese wurden seinerzeit als *Mathematische Monster* bezeichnet: Die Cantor-Menge, die Koch'sche Schneeflocken-Kurve und das Sierpinski-Dreieck. Der amerikanische Mathematiker mit polnisch-jüdischen Wurzeln Benoit Mandelbrot (geb. 1924) erkannte ca 1975, dass alle diese Monster eine charakteristische Eigenschaft besitzen, sie besitzen eine sogenannte *fraktale Dimension*, d.h. ihre Selbstähnlichkeits-Dimension (2) ist keine ganze, sondern eine gebrochene Zahl.

In Latein *fractus* und in Englisch *fraction* bzw. *fracture* bedeutet Bruch, daher führte Mandelbrot den Namen *Fraktale Geometrie* für die Untersuchung dieser Monster ein. Man stellt sich die Fraktale Dimension eines Objektes als eine Maßzahl für die Komplexität, d.h. für die Kompliziertheit des Objektes vor. Eine Dimension von z.B. $D = 1.4$ bedeutet, das Objekt ist komplexer als eine Linie (Dimension 1), aber weniger komplex als eine Fläche (Dimension 2).

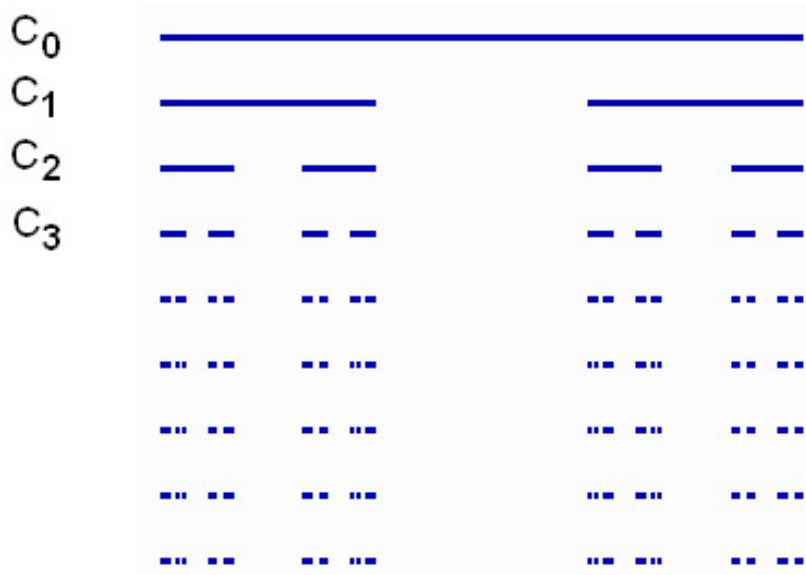


Abbildung 4: Cantor-Menge

4 Die Cantor-Menge C

Auch *Cantor'sches Diskontinuum* oder *Cantor-Staub* genannt.

Dieses Fraktal ist das Älteste, sein Entdecker Georg Cantor (1845-1918) gilt als Be-

gründer der Mengenlehre, und damit als Wegbereiter der Modernen Mathematik. Die Konstruktionsvorschrift der Cantor-Menge ist in Abbildung 4 zu erkennen. Wir bezeichnen das Intervall $[0;1]$ mit C_0 , nehmen das mittlere Drittel, d.h. das offene Intervall $]\frac{1}{3}; \frac{2}{3}[$ heraus, und setzen $C_1 := [0; \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}; 1]$. Um die nächste Stufe, C_2 zu erhalten, wenden wir diese Konstruktion auf die beiden Teilintervalle an, wir nehmen deren mittleres offenes Teilintervall heraus. Diese Konstruktion zeigt unmittelbar, dass jede Menge C_n Teilmenge ihres Vorgängers C_{n-1} ist, d.h. für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $C_n \subset C_{n-1}$. Die C_n bilden eine Schachtelung, einen so genannten *Filter*, es gilt

$$C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_n \supset \dots$$

Wir notieren diese Konstruktion als Rekursiv-Algorithmus, er erzeugt mit den Startwerten $(a,b,y)=(0,1,30)$ Abbildung 4.

```
PROC cantormenge(a,b:REAL;y:INT)
    zeichne-linie von (a,y) nach (b,y)           { Maßstabsfaktor z.B. 600 }
    y := y + 30                                  { 30 Pixel tiefer }
    IF b - a > 0.0001
    THEN t1 := a +  $\frac{b-a}{3}$ 
         t2 := a +  $2\frac{b-a}{3}$ 
         y2 := y                                 { y-Wert zwischenspeichern }
         cantormenge(a, t1, y)
         cantormenge(t2, b, y2)
```

Die Tabelle zeigt die so entstehenden Mengen C_0, C_1, C_2, \dots und deren Längenmaß.

$C_n =$	Menge	Längenmaß
$C_0 =$	$[0; 1]$	1
$C_1 =$	$[0; \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}; 1]$	$\frac{2}{3}$
$C_2 =$	$[0; \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}; \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}; \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}; 1]$	$\frac{4}{9}$
$C_3 =$	$[0; \frac{1}{27}] \cup [\frac{2}{27}; \frac{3}{27}] \cup [\frac{6}{27}; \frac{7}{27}] \cup [\frac{8}{27}; \frac{9}{27}] \cup [\frac{18}{27}; \frac{19}{27}] \cup [\frac{20}{27}; \frac{21}{27}] \cup [\frac{24}{27}; \frac{25}{27}] \cup [\frac{26}{27}; 1]$	$\frac{8}{27}$
...	
$C_n =$	$[0; \frac{1}{3^n}] \cup [\frac{2}{3^n}; \frac{3}{3^n}] \cup [\frac{6}{3^n}; \frac{7}{3^n}] \cup [\frac{8}{3^n}; \frac{9}{3^n}] \cup [\frac{18}{3^n}; \frac{19}{3^n}] \cup \dots \cup [\frac{3^n-1}{3^n}; 1]$	$(\frac{2}{3})^n$
↓		↓
$\mathcal{C} =$	$\bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} C_n$	0

Wir erkennen an der Tabelle: Bei jeder neuen Stufe verdoppelt sich die Anzahl der Intervalle, das Längenmaß von C_n wird für wachsendes n aber immer kleiner, die geometrische Folge $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist Nullfolge.

Die Cantor-Menge \mathcal{C} enthält nun genau diejenigen Zahlen, die in allen C_n enthalten

sind, d.h. sie ist der Durchschnitt der unendlich vielen C_n :

$$\text{Cantormenge } \mathcal{C} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} C_n.$$

Das Längenmaß von \mathcal{C} ist wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{2}{3})^n = 0$ gleich Null.

Welche Zahlen sind denn nun in der Cantor-Menge \mathcal{C} enthalten? Wir sehen an der Tabelle, die Randpunkte der Intervalle sind auch stets in der nächsten Stufe Randpunkte. Das bedeutet, sie sind in allen C_n enthalten und damit auch in deren Durchschnitt \mathcal{C} . Wir notieren sie in einer Liste:

$$0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \frac{1}{27}, \frac{2}{27}, \frac{7}{27}, \frac{8}{27}, \frac{19}{27}, \frac{20}{27}, \frac{25}{27}, \frac{26}{27}, \frac{1}{81}, \frac{2}{81}, \dots \quad (3)$$

Wir sehen, die Cantor-Menge \mathcal{C} enthält mindestens abzählbar unendlich viele Elemente.

Nun wird auch die damalige Bezeichnung Mathematisches Monster einsichtig, eine unendliche Menge, welche ein Längenmaß von 0 hat. In der letzten Stufe von Abb. 4 erscheint diese Menge als sehr klein, sie scheint nur wenige Elemente zu umfassen. Tatsächlich enthält \mathcal{C} mehr als abzählbar unendlich viele Elemente, sie ist über-abzählbar, d.h. sie ist gleich mächtig wie das reelle Intervall $[0;1]$! Desweiteren ist sie ein Fraktal, d.h. ihre Hausdorff-Dimension D ist nicht ganzzahlig. Wir fassen dies in einem Theorem zusammen.

Theorem 1

Die Cantor-Menge \mathcal{C} hat das Längenmaß Null, sie enthält über-abzählbar viele Elemente und ihre Fraktale Dimension beträgt $D = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.630929 \dots$

Bevor wir das Theorem beweisen, einige Erläuterungen zu Zahlssystemen. Üblicherweise schreiben wir eine Zahl x aus dem Intervall $[0;1]$ als Dezimalzahl $x = (0.a_1a_2a_3a_4a_5 \dots)_{10}$ mit Ziffern $a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, beispielweise

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= (0.5)_{10} &= 5 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-3} + 0 \cdot 10^{-4} + 0 \cdot 10^{-5} \dots \text{ oder} \\ \frac{2}{3} &= (0.66666 \dots)_{10} &= 6 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3} + 6 \cdot 10^{-4} + 6 \cdot 10^{-5} \dots \text{ oder} \\ \frac{3}{8} &= (0.375)_{10} &= 3 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3} + 0 \cdot 10^{-4} + 0 \cdot 10^{-5} \dots \end{aligned}$$

Wir können die Zahl $x \in [0;1]$ auch als Dualzahl notieren, $x = (0.b_1b_2b_3b_4b_5 \dots)_2$ mit Ziffern $b_i \in \{0, 1\}$, dies ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= (0.100000 \dots)_2 &= 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + 0 \cdot 2^{-5} \dots \text{ oder} \\ \frac{2}{3} &= (0.101010 \dots)_2 &= 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} \dots \text{ oder} \\ \frac{3}{8} &= (0.011000 \dots)_2 &= 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + 0 \cdot 2^{-5} \dots \end{aligned}$$

Oder wir wählen die Trialzahl-Darstellung zur Basis 3, wir stellen x dar als Summe von Potenzen zur Basis 3 dar,

$$x = (0.c_1c_2c_3c_4c_5 \dots)_3 \text{ mit Ziffern } c_i \in \{0, 1, 2\}. \quad (4)$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= (0.111111\dots)_3 = 1 \cdot 3^{-1} + 1 \cdot 3^{-2} + 1 \cdot 3^{-3} + 1 \cdot 3^{-4} + 1 \cdot 3^{-5} \dots \text{ oder} \\ \frac{2}{3} &= (0.200000\dots)_3 = 2 \cdot 3^{-1} + 0 \cdot 3^{-2} + 0 \cdot 3^{-3} + 0 \cdot 3^{-4} + 0 \cdot 3^{-5} \dots \text{ oder} \\ \frac{3}{8} &= (0.101010\dots)_3 = 1 \cdot 3^{-1} + 0 \cdot 3^{-2} + 1 \cdot 3^{-3} + 0 \cdot 3^{-4} + 1 \cdot 3^{-5} \dots \end{aligned}$$

Betrachten wir in der Tabelle oder in Abb. 4 die Menge C_1 , ihr fehlen Zahlen zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$. Genau diese haben aber in der Trialzahl-Darstellung an der ersten Ziffer c_1 die Ziffer 1, siehe (4). Das bedeutet in C_1 liegen keine Zahlen mit $c_1 = 1$. Und auch in C_2, C_3, C_4, \dots liegen keine Zahlen mit $c_1 = 1$, da das Intervall $]\frac{1}{3}; \frac{2}{3}[$ heraus genommen wurde. Folglich gilt für alle $x \in C_1$

$$x = (0.c_1c_2c_3c_4c_5\dots)_3 \text{ mit } c_1 \neq 1.$$

Betrachten wir die Menge C_2 . Für diese gilt sowohl $c_1 \neq 1$ als auch $c_2 \neq 1$, denn die Intervalle, deren Elemente an der 2. Stelle der Trialzahl-Darstellung eine 1 zeigen, wurden herausgenommen.

Wir schließen induktiv weiter: Zahlen aus C_3 haben an der 1., 2. und 3. Stelle keine 1, Zahlen aus C_4 haben an der 1., 2., 3. und 4. Stelle keine 1, und Zahlen aus C_n haben an der 1., 2., \dots , n -ten Stelle keine 1.

Damit folgern wir für die Cantor-Menge \mathcal{C} : Jede Zahl $x \in \mathcal{C}$ hat eine Trialzahl-Darstellung, in der nur die Ziffern 0 und 2 vorkommen.

Mit diesem Wissen können wir den Beweis des Theorems führen.

Beweis von Theorem 1:

A. Das Längenmaß von \mathcal{C} ist 0: Dies folgt aus $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{2}{3})^n = 0$.

B. \mathcal{C} ist überabzählbar. Indirekt, mit dem Cantorschen Diagonal-Verfahren.

Angenommen, \mathcal{C} ist abzählbar unendlich. Dann kann \mathcal{C} in einer Liste wie (3) geschrieben werden: $\mathcal{C} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots\}$.

Wir notieren diese Zahlen in der Trialzahl-Darstellung und erhalten

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.c_{11}c_{21}c_{31}c_{41}c_{51}\dots \\ x_2 &= 0.c_{12}c_{22}c_{32}c_{42}c_{52}\dots \\ x_3 &= 0.c_{13}c_{23}c_{33}c_{43}c_{53}\dots \\ x_4 &= 0.c_{14}c_{24}c_{34}c_{44}c_{54}\dots \\ x_5 &= 0.c_{15}c_{25}c_{35}c_{45}c_{55}\dots \\ x_6 &= 0.c_{16}c_{26}c_{36}c_{46}c_{56}\dots \\ x_7 &= 0.c_{17}c_{27}c_{37}c_{47}c_{57}\dots \\ &\dots \dots \end{aligned}$$

Alle Ziffern c_{ij} sind $\neq 1$, es kommen nur die Ziffern 0 und 2 vor. Da \mathcal{C} nach unserer Annahme abzählbar unendlich ist, ist auch keine Zahl vergessen worden. Das bedeutet, alle Elemente der Cantor-Menge stehen in der Liste.

Wir konstruieren nun ein Element $y = y_1y_2y_3y_4y_5\dots$, das nicht in der Liste vorkommt, aber ebenfalls in der Cantor-Menge liegt.

Wähle $y_1 \neq c_{11}$, das geht, da c_{11} entweder 0 oder 2 ist.

Wähle $y_2 \neq c_{22}$, das geht ebenfalls, da c_{22} entweder 0 oder 2 ist.

Wähle $y_3 \neq c_{33}$, und $y_4 \neq c_{44}$, u.s.w.

Die Zahl y liegt wegen $y_1 \neq 1$ in C_1 , und wegen $y_2 \neq 1$ in C_2, \dots , und wegen $y_n \neq 1$

in C_n, \dots , sie ist in allen C_n enthalten und folglich auch in deren Durchschnitt \mathcal{C} . Widerspruch zur Annahme, es folgt die Überabzählbarkeit von \mathcal{C} .

C. Die Fraktale Dimension von \mathcal{C} ist $D = \frac{\log 2}{\log 3}$.

Dies folgt mit der Selbstähnlichkeits-Dimension (2) von Hausdorff. Betrachten wir die letzte Stufe von Abb. 4, mit Pixelgenauigkeit stellt diese die Cantor-Menge dar. Wir legen sie unter einen Kopierer mit Verkleinerungsfaktor $s = \frac{1}{3}$ und erhalten eine selbstähnliche Kopie. Um das Original zu überdecken, benötigen wir $a = 2$ solcher Kopien. In Formel (2) eingesetzt, folgt

$$\begin{aligned} D &= -\frac{\log a}{\log s} = -\frac{\log 2}{\log \frac{1}{3}} = -\frac{\log 2}{\log 1 - \log 3} \\ &= \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.630929 \dots \end{aligned}$$

Damit ist Theorem 1 bewiesen.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Dezimalzahl-Darstellung und die Trialzahl-Darstellung der Zahlen

$$\frac{2}{9}, \frac{8}{27}, \frac{26}{27}, \frac{19}{81}.$$

Aufgabe 2

Implementieren Sie die Prozedur *cantormenge* und zeichnen Sie Abb. 4 auf den Bildschirm.

Aufgabe 3

Suchen Sie im Internet nach der Cantor-Menge.

5 Die Koch'sche Schneeflocke

Auch *Koch-Insel* genannt. Im Jahre 1904 legte der schwedische Mathematiker Helge von Koch (1870-1924) eine Kurve vor, welche an jeder Stelle stetig, aber an keiner Stelle differenzierbar ist. Wir erinnern uns: stetig bedeutet, man kann die Kurve zeichnen ohne den Zeichenstift abzusetzen; und differenzierbar bedeutet: an jeder Stelle kann man eine - eindeutig bestimmte - Tangente zeichnen.

Koch ging von einer Strecke der Länge 1 aus, genannt *Initiator*. Er teilte diese Strecke in drei gleich große Teile, nahm das mittlere Teil heraus und ergänzte es durch zwei Seiten eines gleichseitigen Dreiecks, siehe Stufe 1 der Bildfolge 5. Diese Figur nennen wir *Generator*. Die vier Seiten der Stufe 1 veränderte Koch nach der selben Regel: Teilen in drei gleich große Teile, und das mittlere Teil wird ersetzt durch zwei Seiten eines gleichseitigen Dreiecks. So entsteht

Startet man diesen Prozess mit einem gleichseitigen Dreieck der Fläche $A_0 = \frac{1}{4}\sqrt{3}$ und setzt ihn immer weiter fort, so entsteht Bildfolge 6. Die Seitenlängen x_n werden von Stufe zu Stufe kleiner um den Faktor $\frac{1}{3}$, d.h. $x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n$, ihre Länge nähert sich der 0. Aber die Anzahl s_n der Seitenlängen vervierfacht sich, $s_{n+1} = 4s_n$, und wächst über alle Grenzen.

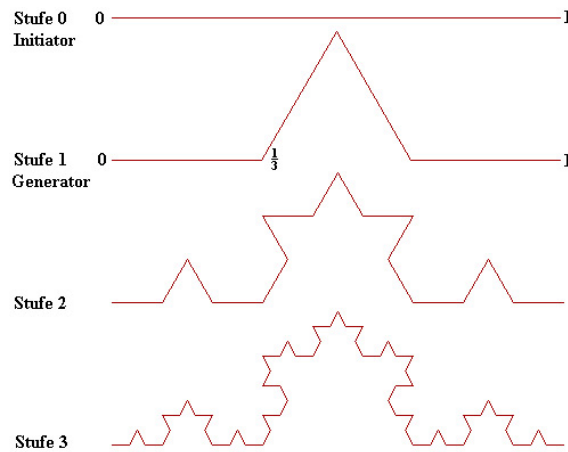


Abbildung 5: Bildfolge 5

Ebenso wachsen der Umfänge U_n über alle Grenzen, von Stufe zu Stufe erhöht sich der Umfang um den Faktor $\frac{4}{3}$, denn ein Drittel jeder Seite wird herausgenommen und zwei Drittel werden hinzu gefügt. Folglich gilt $U_{n+1} = \frac{4}{3}U_n$.

Verfolgen wir den Flächeninhalt der Schneeflocke. Die Stufe n hat y_n Seiten der Länge x_n und den Inhalt A_n . An jeder der y_n Seiten kommt ein Dreieck dazu, dessen Seitenlänge $= \frac{x_n}{3}$ und damit dessen Inhalt $= \left(\frac{x_n}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ beträgt. Der Flächeninhalt der nächsten Stufe ist damit

$$A_{n+1} = A_n + y_n x_n^2 \frac{\sqrt{3}}{36}.$$

Als eine Art 'Grenzwert' entsteht das Fraktal *Koch'sche Schneeflocke*. Die Schneeflocke hat tatsächlich keine Seiten mehr, sie besteht ausschließlich aus Ecken. Wir stellen die Werte der einzelnen Stufen in der Bildfolge 6 in einer Tabelle zusammen.

Tabelle der Konstruktionsstufen der Schneeflocke

Stufe n	Seitenlänge x_n	Anzahl der Seiten y_n	Umfang U_n	Flächeninhalt A_n
0	1	3	$U_0 = 3$	$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0.4330$
1	$\frac{1}{3}$	$3 \cdot 4 = 12$	$\frac{4}{3}U_0 = 4$	$A_0 + \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^0 \approx 0.5774$
2	$\frac{1}{9}$	$3 \cdot 4^2 = 48$	$\left(\frac{4}{3}\right)^2 U_0 = \frac{16}{3}$	$A_1 + \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^1 \approx 0.6415$
3	$\frac{1}{27}$	$3 \cdot 4^3 = 192$	$\left(\frac{4}{3}\right)^3 U_0 = \frac{64}{9}$	$A_2 + \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^2 \approx 0.6700$
...				
n	$\frac{1}{3^n}$	$3 \cdot 4^n$	$U_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n U_0$	$A_n = \frac{\sqrt{3}}{20} \left(8 - 3\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$
\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow
∞	0	∞	∞	$\frac{2}{5}\sqrt{3} = \frac{8}{5}A_0 \approx 0.6928$

Aufgabe 4

Betrachten Sie Bildfolge 6 und bestätigen Sie die Werte der zweiten und der dritten Spalte.

Aufgabe 5

Bestätigen Sie die Formel für die Umfänge U_n in der vierten Spalte z.B. mit vollständiger Induktion, beweisen Sie

A. Der Umfang U_n der Konstruktionsstufe n beträgt

$$U_n = 3\left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

B. Bestätigen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \infty$.

Wir interpretieren Aussage B:

Sollte sich jemand auf den Weg machen mit dem Ziel, einmal um die Koch'sche Schneeflocke herum zu wandern, so wird er oder sie nie wieder am Anfangspunkt ankommen.

Aufgabe 6

Bestätigen Sie die Formel für den Flächeninhalt mit vollständiger Induktion, d.h. beweisen Sie

A. Der Flächeninhalt der Konstruktionsstufe n beträgt

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{20} \left(8 - 3\left(\frac{4}{9}\right)^n \right).$$

B. Bestätigen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{8}{5} A_0$.

Aufgabe 7

Suchen Sie im Internet nach der Koch'schen Schneeflocke.

Wir fassen diese Ergebnisse in einem Theorem zusammen.

Theorem 2

Ausgehend von einem gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge 1 ist die Koch'sche Schneeflocke eine Figur mit unendlich vielen Ecken und mit unendlich vielen Seiten der Länge 0. Ihr Umfang ist ∞ und ihr Flächeninhalt beträgt $\frac{2}{5}\sqrt{3} \approx 0.6928$.

Die fraktale Dimension der Schneeflocke ist $D = \frac{\log(4)}{\log(3)} \approx 1.26185 \dots$

Wir erinnern an die damalige Wahl des Begriffes 'Mathematisches Monster', eine Fläche mit endlichem, begrenztem Inhalt und unendlichem Umfang, der sich aus Teillängen der Länge 0 zusammensetzt, widerspricht unseren intuitiven geometrischen Vorstellungen.

Beweis von Theorem 2:

A. Die Aussagen über Ecken, Kanten, Umfang und Flächeninhalt folgen aus der Tabelle und aus den Aufgaben 5 und 6.

B. Die fraktale Dimension:

Betrachten Sie Abbildung 7, sie zeigt den oberen Teil der Schneeflocke.

Wir werden nun analog zur Argumentation mit den Bildern 1, 2 und 3 eine Selbstähnlichkeits-Dimension berechnen.

Wir legen den Schneeflockenteil A-E im Geiste unter einen Kopierer, der den Verkleinerungsfaktor $\frac{1}{3}$ eingestellt hat. Als Kopie erhalten wir das Bild A'-E'. Dieses ist gleich dem Teilbild A-B, folglich ist A-B zum Ausgangsbild A-E ähnlich, das bedeutet die Figur ist selbstähnlich! Um die Figur A-E mit Kopien zu überdecken, benötigen wir $a = 4$ solcher Kopien, die Teilbilder A-B, B-C, C-D und D-E. Mit diesen Werten für a und s gehen wir in die Hausdorff'sche Selbstähnlichkeits-Dimension (2), und erhalten

$$D = -\frac{\log(a)}{\log(s)} = -\frac{\log(4)}{\log(\frac{1}{3})} = \frac{-\log(4)}{\log(1) - \log(3)} = \frac{\log(4)}{\log(3)} \approx 1.26185\dots, \quad (5)$$

eine nicht-ganzzahlige Zahl, d.h. eine gebrochene Zahl.

Im Artikel über Lindenmayer-Systeme werden wir Algorithmen für das Zeichnen der Koch'schen Schneeflocke präsentieren.

6 Das Sierpinski-Dreieck

Der polnische Mathematiker Waclaw Sierpinski (1882-1969) stellte 1916 ein weiteres mathematisches Monster vor, siehe Abb. 8. Man beachte die Selbstähnlichkeit, ein Kopierer mit Verkleinerungsfaktor $\frac{1}{2}$ erzeugt eine Teilfigur. Eine Konstruktionsmöglichkeit dieser Figur zeigt Bildfolge 9, wir werden noch andere kennen lernen.

Ausgang ist ein gleichseitiges Dreieck S_0 der Seitenlänge 1 und daher des Flächeninhalts $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Verbindet man dessen Seitenmitten, so entstehen vier gleichseitige Dreiecke, deren Seitenlänge halb so groß ist wie die des Ausgangsdreiecks, also $\frac{1}{2}$, und deren Flächeninhalt ein Viertel des vorherigen beträgt, also $\frac{\sqrt{3}}{16}$.

Dann wird das mittlere Dreieck herausgenommen, es entsteht die Figur S_1 . Diese Figur hat 9 Seiten der Länge $\frac{1}{2}$, ihr Flächeninhalt beträgt das Dreifache eines Dreiecks, also $3 \frac{\sqrt{3}}{16}$. Auf die Figur S_1 , d.h. auf die verbleibenden drei Dreiecke, wird nun dieselbe Konstruktion angewandt. Wiederholt man diesen Vorgang immer weiter, so entstehen die Figuren S_2, S_3, S_4, \dots , diese bilden wiederum eine Verschachtelung bzw. einen Filter, für sie gilt, analog zur Cantor-Menge,

$$S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset S_4 \dots \supset S_n \dots$$

Das Fraktal Sierpinski-Dreieck ergibt sich als 'Grenzwert' dieser Konstruktion, als Schnittmenge:

$$\mathcal{S} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} S_n.$$

Die Menge \mathcal{S} ist nicht leer, sie enthält alle Eckpunkte der Dreiecke, die in der Konstruktion vorkommen, wir notieren einige mit der Höhe $h := \frac{\sqrt{3}}{2}$, vgl. Abb. 8.

$$(0, 0), (1, 0), (\frac{1}{2}, h), (\frac{1}{4}, \frac{h}{2}), (\frac{1}{2}, 0), (\frac{3}{4}, \frac{h}{2}), (\frac{1}{8}, \frac{h}{4}), (\frac{1}{4}, 0), (\frac{3}{8}, \frac{h}{4}), (\frac{5}{8}, \frac{h}{4}), (\frac{3}{4}, 0), (\frac{7}{8}, \frac{h}{2}), \dots$$

Wir stellen Seitenlängen und Flächeninhalte wieder in einer Tabelle zusammen:

Tabelle der Konstruktions-Stufen des Sierpinski-Dreiecks

Stufe n	Seitenlänge	Inhalt eines Dreiecks	Anzahl der Seiten	Anzahl der Dreiecke	Summe der Seitenlängen	Inhalt von S_n
0	1	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	3	1	3	$\frac{\sqrt{3}}{4}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{16}$	9	3	$\frac{9}{2}$	$\frac{3}{16}\sqrt{3}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{64}$	27	9	$\frac{27}{4}$	$\frac{9}{64}\sqrt{3}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{\sqrt{3}}{256}$	81	27	$\frac{81}{8}$	$\frac{27}{256}\sqrt{3}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{\sqrt{3}}{1024}$	243	81	$\frac{243}{16}$	$\frac{81}{1024}\sqrt{3}$
...
n	$\frac{1}{2^n}$	$\frac{\sqrt{3}}{4^{n+1}}$	$3 \cdot 3^n$	3^n	$3\left(\frac{3}{2}\right)^n$	$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n$
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
∞	0	0	∞	∞	∞	0

Wir notieren die Monster-Eigenschaften des Sierpinski-Dreiecks in einem Theorem.

Theorem 3

Das Sierpinski-Dreieck \mathcal{S} besteht aus unendlich vielen Dreiecken mit Seitenlänge 0 und Flächeninhalt 0. Die Summe aller Seitenlängen ist ∞ , die Summe aller Dreiecksflächen, d.h. die Gesamtfläche von \mathcal{S} , ist 0.

Die fraktale Dimension des Sierpinski-Dreiecks \mathcal{S} ist $D = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.5849625 \dots$

Beweis:

Die ersten Aussagen folgen aus den Formeln für S_n in der Tabelle.

Die fraktale Dimension des Sierpinski-Dreiecks:

Wir legen das Sierpinski-Dreieck \mathcal{S} unter einen Kopierer mit einem Verkleinerungsfaktor $s = \frac{1}{2}$ und erhalten als Kopie ein Sierpinski-Dreieck der Seitelänge $\frac{1}{2}$. Um die Figur \mathcal{S} zu überdecken, benötigen wir die Anzahl von $a = 3$ solcher Kopien. Die Selbstähnlichkeits-Dimension (2) ergibt

$$D = -\frac{\log(a)}{\log(s)} = -\frac{\log(3)}{\log(\frac{1}{2})} = -\frac{\log(3)}{\log(1) - \log(2)} = \frac{\log(3)}{\log(2)} \approx 1.58496 \dots$$

Aufgabe 8

Verifizieren Sie die Formeln der Zeile n in der Tabelle, z.B. mit vollständiger Induktion.

Aufgabe 9

Suchen Sie im Internet nach dem Sierpinski-Dreieck.

Die folgende Aufgabe demonstriert den Zusammenhang der bisher beschriebenen Mathematischen Monster.

Aufgabe 10 Verifizieren Sie:

Für die fraktalen Dimensionen D_C der Cantor-Menge, D_K der Koch'schen Schneeflocke und D_S des Sierpinski-Dreiecks gelten:

$$D_K = 2 D_C \quad \text{und} \quad D_S = \frac{1}{D_C}.$$

Obwohl das PASCAL-Dreieck seit über 200 Jahren bekannt ist, wurde das Ergebnis der folgenden Aufgabe erst 1992 in [7] von der Bremen Gruppe vorgelegt.

Aufgabe 11

Erzeugen Sie das PASCAL-Dreieck auf Ihrem Bildschirm, notieren Sie dabei gerade und ungerade Zahlen in verschiedenen Farben.

Hinweis: Zur Berechnung der Binomial-Koeffizienten empfehlen wir die Verwendung einer rekursiven Funktion $(n,k) \rightarrow \text{binomko}(n,k)$, basierend auf dem Additionsprinzip

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \quad \text{bzw.} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Sie lautet

```
PROC binomko(n,k:INT):REAL
IF n=0 OR k=0 OR n=k THEN binomko:=1
ELSE binomko:= binomko(n-1,k-1)+binomko(n-1,k)
```

Im Hauptprogramm erscheint dann in etwa

```
FOR n:=0 TO 20 DO
  FOR k:=0 TO n DO
    x:=binomko(n,k)
    IF x MOD 2 =0 THEN color:=red ELSE color:=green
    WRITE(x)
  NEWLINE
```

Die Verwendung der Rekursiv-Funktion benötigt Rechenzeit, eine Alternative wäre die Verwendung der Fakultät $n!$, doch diese erreicht sehr schnell sehr große Zahlen. In Artikel 3 über IFS-Fraktale werden wir einen Algorithmus kennen lernen, der das Sierpinski-Dreieck sehr viel schneller und überzeugender auf dem Bildschirm zeigt. In Artikel 4 präsentieren wir den Algorithmus zur *Sierpinski-Kurve*, eine Linie, die das Sierpinski-Dreieck flächenfüllend durchläuft. Wir stellen weitere Monster vor:

Aufgabe 12 Sierpinski-Teppich

Suchen Sie dieses Monster im Internet oder in Fachbüchern. Erzeugen Sie eine Tabelle der Konstruktionsstufen. Bestimmen Sie die Dimension $D = \frac{\log 8}{\log 3}$.

Aufgabe 13 Menger-Schwamm

Von Karl Menger 1926 vorgelegtes Monster. Suchen Sie danach im Internet oder in [10]. Erzeugen Sie die Tabelle der Konstruktionsstufen mit Oberflächen A_n und Volumen V_n . Zeigen Sie:

$$A: \quad A_n = \frac{8}{3 \cdot 9^n} (2 \cdot 8^n + \sum_{i=0}^n 8^i \cdot 20^{n-i}) \quad \text{und} \quad V_n = \left(\frac{20}{27}\right)^n.$$

$$B. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \infty.$$

$$C. \quad D = \frac{\log 20}{\log 3} \approx 2.7268 \dots$$

7 Bezogene Literatur

- 1 **Barnsley, Michael F.** *Fractals Everywhere*
Academic Press Professional Cambridge MA (1993) ISBN 0-12-079061-0
- 2 **Bayer, Wolf** *Katzen auf Zypern - Feigenbaum, Chaos*
Praxis der Mathematik PM 45 (2003)
- 3 **Becker, Karl-Heinz; Dörfler, Michael** *Dynamische Systeme und Fraktale*
Vieweg-Verlag 1992 Braunschweig/Wiesbaden ISBN 3-528-34461-X
- 4 **Henn, Hans-Wolfgang** *Fraktale Geometrie*
mathematik lehren Heft 31 (1988) S.40-46
- 5 **Hermans, A.** *Chaos im Mathematikunterricht*
Praxis der Mathematik PM 34 (1992) 81-89
- 6 **Benoit B. Mandelbrot** *Die Fraktale Geometrie der Natur*
Birkhäuser Verlag Basel (1987)
- 7 **Peitgen, H.-O., Jürgens, H., Saupe, D.** Bremen Gruppe
Bausteine des Chaos - Fraktale
Springer-Klett-Cotta Berlin Heidelberg Stuttgart (1992)
- 8 **Peitgen, H.-O., Jürgens, H., Saupe, D.** Bremen Gruppe
Chaos - Bausteine der Ordnung
Springer-Klett-Cotta Berlin Heidelberg Stuttgart (1994)
- 9 **Zeitler, H.** *Chaos - was ist das?*
Praxis der Mathematik PM 33 (1991) 49-54
- 10 **DUDEN** *Lehrbuch und Lehrermaterial Analysis*
DUDEN-PAETEC-Verlag Berlin Frankfurt (2006)
ISBN 3-89818-674-1 und 3-89818-675-X

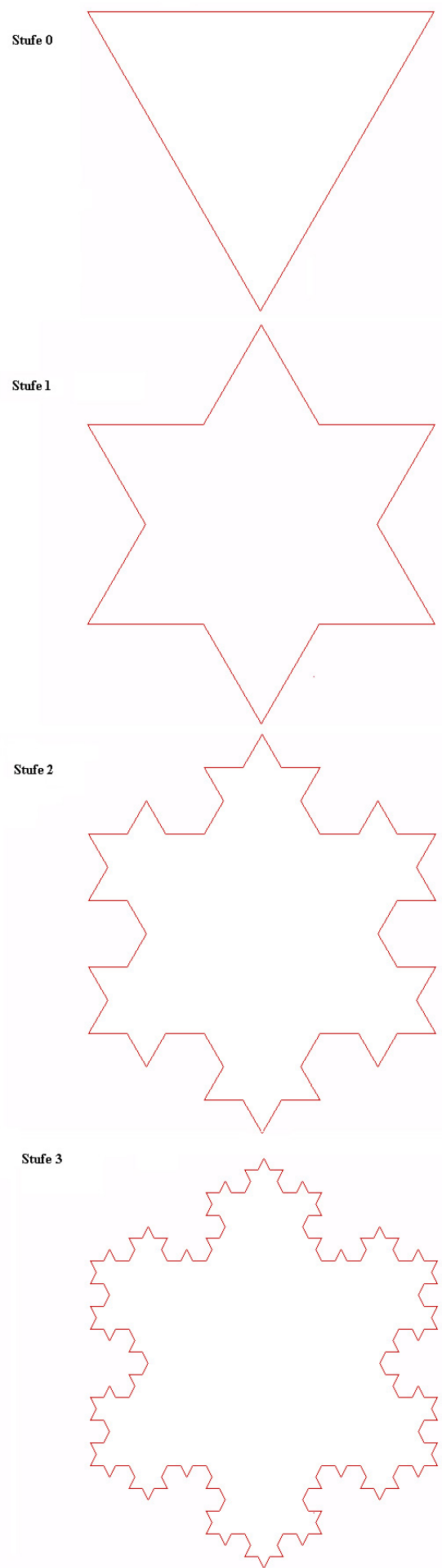


Abbildung 6: Bildfolge 6

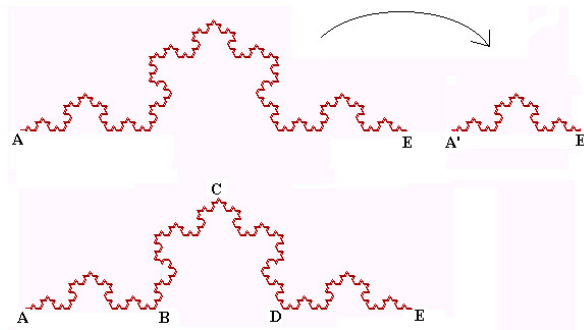


Abbildung 7: zur Dimensionsberechnung

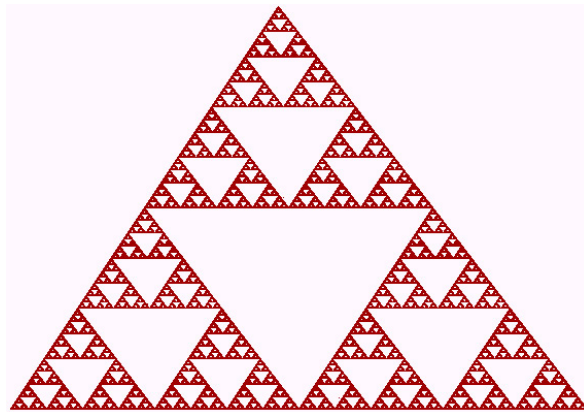


Abbildung 8: Sierpinski-Dreieck

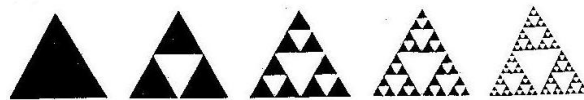


Abbildung 9: Bildfolge 9